Espacios Normados. Conceptos Básicos

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

En todo lo que sigue vamos a considerar espacios vectoriales reales o complejos, así, en la expresión “sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$” se entenderá que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

En todo lo que sigue vamos a considerar espacios vectoriales reales o complejos, así, en la expresión “sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$” se entenderá que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Si A y B son subconjuntos de un espacio vectorial X y $\Gamma\subset\mathbb{K}$, se define:

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}; \qquad \Gamma B=\{\lambda b : \lambda\in\Gamma, b\in B\}$$

En todo lo que sigue vamos a considerar espacios vectoriales reales o complejos, así, en la expresión "sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$" se entenderá que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si A y B son subconjuntos de un espacio vectorial X y $\Gamma \subset \mathbb{K}$, se define:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}; \qquad \Gamma B = \{\lambda b : \lambda \in \Gamma, b \in B\}$$

Cuando los conjuntos $A = \{a\}$ o $\Gamma = \{\lambda\}$ sólo tienen un elemento, escribimos $a + B$ o λB en vez de $\{a\} + B$ o $\{\lambda\} B$.

En todo lo que sigue vamos a considerar espacios vectoriales reales o complejos, así, en la expresión “sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$” se entenderá que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si A y B son subconjuntos de un espacio vectorial X y $\Gamma \subset \mathbb{K}$, se define:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}; \qquad \Gamma B = \{\lambda b : \lambda \in \Gamma, b \in B\}$$

Cuando los conjuntos $A = \{a\}$ o $\Gamma = \{\lambda\}$ sólo tienen un elemento, escribimos $a + B$ o λB en vez de $\{a\} + B$ o $\{\lambda\} B$.

Un subconjunto $M \subset X$ es un subespacio vectorial o, simplemente, un **subespacio** de X si $\mathbb{K}M + M \subset M$.

En todo lo que sigue vamos a considerar espacios vectoriales reales o complejos, así, en la expresión "sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$" se entenderá que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Si A y B son subconjuntos de un espacio vectorial X y $\Gamma \subset \mathbb{K}$, se define:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}; \qquad \Gamma B = \{\lambda b : \lambda \in \Gamma, b \in B\}$$

Cuando los conjuntos $A = \{a\}$ o $\Gamma = \{\lambda\}$ sólo tienen un elemento, escribimos $a + B$ o λB en vez de $\{a\} + B$ o $\{\lambda\} B$.

Un subconjunto $M \subset X$ es un subespacio vectorial o, simplemente, un **subespacio** de X si $\mathbb{K}M + M \subset M$.

Dado un subconjunto $A \subset X$, representaremos por $\mathrm{Lin}(A)$ el más pequeño subespacio vectorial de X que contiene a A, que se llama el *subespacio de X generado* por A.

En todo lo que sigue vamos a considerar espacios vectoriales reales o complejos, así, en la expresión "sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$" se entenderá que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Si A y B son subconjuntos de un espacio vectorial X y $\Gamma \subset \mathbb{K}$, se define:

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}; \qquad \Gamma B=\{\lambda b : \lambda\in\Gamma, b\in B\}$$

Cuando los conjuntos $A=\{a\}$ o $\Gamma=\{\lambda\}$ sólo tienen un elemento, escribimos $a+B$ o λB en vez de $\{a\}+B$ o $\{\lambda\}B$.

Un subconjunto $M\subset X$ es un subespacio vectorial o, simplemente, un **subespacio** de X si $\mathbb{K}M+M\subset M$.

Dado un subconjunto $A\subset X$, representaremos por $\mathrm{Lin}(A)$ el más pequeño subespacio vectorial de X que contiene a A, que se llama el *subespacio de X generado* por A.

Es claro que $\mathrm{Lin}(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de A, esto es:

$$\mathrm{Lin}(A)=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k \,:\, n\in\mathbb{N},\ \lambda_k\in\mathbb{K},\ a_k\in A\ (1\leqslant k\leqslant n)\right\}$$

Se dice que A es un conjunto o *sistema de generadores* de X, si $\mathrm{Lin}(A) = X$.

Se dice que A es un conjunto o *sistema de generadores* de X, si $\mathrm{Lin}(A) = X$.

Se dice que A es un *conjunto de vectores linealmente independientes* si para todo $x \in A$ se verifica que $x \notin \mathrm{Lin}(A \setminus \{x\})$, equivalentemente, el vector 0 no puede expresarse como combinación lineal de elementos de A con algún coeficiente no nulo.

Se dice que A es un conjunto o *sistema de generadores* de X, si $\mathrm{Lin}(A) = X$.

Se dice que A es un *conjunto de vectores linealmente independientes* si para todo $x \in A$ se verifica que $x \notin \mathrm{Lin}(A \setminus \{x\})$, equivalentemente, el vector 0 no puede expresarse como combinación lineal de elementos de A con algún coeficiente no nulo.

Un sistema de generadores de X formado por vectores linealmente independientes se llama una *base algebraica* o, simplemente, una *base* de X.

Se dice que A es un conjunto o *sistema de generadores* de X, si $\mathrm{Lin}(A) = X$.

Se dice que A es un *conjunto de vectores linealmente independientes* si para todo $x \in A$ se verifica que $x \notin \mathrm{Lin}(A \setminus \{x\})$, equivalentemente, el vector 0 no puede expresarse como combinación lineal de elementos de A con algún coeficiente no nulo.

Un sistema de generadores de X formado por vectores linealmente independientes se llama una *base algebraica* o, simplemente, una *base* de X.

Los espacio vectoriales que interesan en Análisis Funcional son espacios de funciones que, salvo excepciones, no tienen dimensión finita, es decir, no tienen sistemas finitos de generadores.

Se dice que A es un conjunto o *sistema de generadores* de X, si $\mathrm{Lin}(A) = X$.

Se dice que A es un *conjunto de vectores linealmente independientes* si para todo $x \in A$ se verifica que $x \notin \mathrm{Lin}(A \setminus \{x\})$, equivalentemente, el vector 0 no puede expresarse como combinación lineal de elementos de A con algún coeficiente no nulo.

Un sistema de generadores de X formado por vectores linealmente independientes se llama una *base algebraica* o, simplemente, una *base* de X.

Los espacio vectoriales que interesan en Análisis Funcional son espacios de funciones que, salvo excepciones, no tienen dimensión finita, es decir, no tienen sistemas finitos de generadores.

La existencia de bases en tales espacios no es evidente y depende de un resultado conocido como **Lema de Zorn** que en este curso tendrá gran importancia.

Una relación binaria $\preccurlyeq$ en un conjunto A se dice que es una **relación de orden parcial** si para todos a, b, c en A se verifican las propiedades siguientes.

- Reflexiva. $a \preccurlyeq a$.

Una relación binaria $\preccurlyeq$ en un conjunto A se dice que es una **relación de orden parcial** si para todos a, b, c en A se verifican las propiedades siguientes.

- Reflexiva. $a \preccurlyeq a$.
- Antisimétrica. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a$, entonces $a = b$.

Una relación binaria $\preccurlyeq$ en un conjunto A se dice que es una **relación de orden parcial** si para todos a,b,c en A se verifican las propiedades siguientes.

- Reflexiva. $a \preccurlyeq a$.
- Antisimétrica. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a$, entonces $a = b$.
- Transitiva. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq c$ entonces $a \preccurlyeq c$.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto con una *relación de orden parcial* $\preccurlyeq$. Un conjunto no vacío $C \subset \mathcal{A}$ que está totalmente ordenado, es decir, que para dos elementos cualesquiera x,y en C se verifica que $x \preccurlyeq y$ o $y \preccurlyeq x$, se dice que es una *cadena* en $\mathcal{A}$.

Una relación binaria $\preccurlyeq$ en un conjunto A se dice que es una **relación de orden parcial** si para todos a, b, c en A se verifican las propiedades siguientes.

- Reflexiva. $a \preccurlyeq a$.
- Antisimétrica. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a$, entonces $a = b$.
- Transitiva. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq c$ entonces $a \preccurlyeq c$.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto con una *relación de orden parcial* $\preccurlyeq$. Un conjunto no vacío $C \subset \mathcal{A}$ que está totalmente ordenado, es decir, que para dos elementos cualesquiera x, y en C se verifica que $x \preccurlyeq y$ o $y \preccurlyeq x$, se dice que es una *cadena* en $\mathcal{A}$.

Se dice que $a \in \mathcal{A}$ es un elemento **maximal** si no hay ningún elemento en $\mathcal{A}$ que sea mayor que a, es decir, si $b \in \mathcal{A}$ y $a \preccurlyeq b$, entonces $a = b$.

Una relación binaria $\preccurlyeq$ en un conjunto A se dice que es una **relación de orden parcial** si para todos a, b, c en A se verifican las propiedades siguientes.

- Reflexiva. $a \preccurlyeq a$.
- Antisimétrica. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a$, entonces $a = b$.
- Transitiva. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq c$ entonces $a \preccurlyeq c$.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto con una *relación de orden parcial* $\preccurlyeq$. Un conjunto no vacío $C \subset \mathcal{A}$ que está totalmente ordenado, es decir, que para dos elementos cualesquiera x, y en C se verifica que $x \preccurlyeq y$ o $y \preccurlyeq x$, se dice que es una *cadena* en $\mathcal{A}$.

Se dice que $a \in \mathcal{A}$ es un elemento **maximal** si no hay ningún elemento en $\mathcal{A}$ que sea mayor que a, es decir, si $b \in \mathcal{A}$ y $a \preccurlyeq b$, entonces $a = b$.

Lema de Zorn. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto parcialmente ordenado en el cual toda cadena tiene una cota superior, entonces $\mathcal{A}$ tiene algún elemento maximal.

Proposición. *Si X es un espacio vectorial y S es un subconjunto de X formado por vectores linealmente independientes, entonces existe una base de X que contiene a S. En particular, todo espacio vectorial $X \neq \{0\}$ tiene una base.*

Proposición. *Si X es un espacio vectorial y S es un subconjunto de X formado por vectores linealmente independientes, entonces existe una base de X que contiene a S. En particular, todo espacio vectorial $X \neq \{0\}$ tiene una base.*

Se verifica que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número cardinal, finito o infinito, que se llama la *dimensión* (algebraica) del espacio.

Proposición. *Si X es un espacio vectorial y S es un subconjunto de X formado por vectores linealmente independientes, entonces existe una base de X que contiene a S. En particular, todo espacio vectorial $X \neq \{0\}$ tiene una base.*

Se verifica que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número cardinal, finito o infinito, que se llama la *dimensión* (algebraica) del espacio.

Las bases algebraicas son poco útiles en Análisis Funcional, entre otras razones porque, salvo unos pocos casos en que la dimensión es infinita numerable, no se conocen bases.

Proposición. *Si X es un espacio vectorial y S es un subconjunto de X formado por vectores linealmente independientes, entonces existe una base de X que contiene a S. En particular, todo espacio vectorial $X \neq \{0\}$ tiene una base.*

Se verifica que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número cardinal, finito o infinito, que se llama la *dimensión* (algebraica) del espacio.

Las bases algebraicas son poco útiles en Análisis Funcional, entre otras razones porque, salvo unos pocos casos en que la dimensión es infinita numerable, no se conocen bases.

Además, como veremos más adelante, la mayoría de los espacio vectoriales de interés en Análisis Funcional tienen dimensión infinita no numerable.

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \ \| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifica las siguientes propiedades:

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \, \| : X \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$.

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$.

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$.

El par ordenado $(X, \| \ \|)$ se llama un **espacio normado**.

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$.

El par ordenado $(X, \| \ \|)$ se llama un **espacio normado**.

Cuando solamente se verifican las propiedades ii) y iii) se dice que $\| \ \|$ es una **seminorma** en X.

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$.

El par ordenado $(X, \| \ \|)$ se llama un **espacio normado**.

Cuando solamente se verifican las propiedades ii) y iii) se dice que $\| \ \|$ es una **seminorma** en X.

Dado un espacio normado, $(X, \| \ \|)$, la aplicación $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\| \qquad (x, y \in X)$$

es una distancia en X que se llama *distancia asociada a la norma*.

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.
iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$.

El par ordenado $(X, \| \ \|)$ se llama un **espacio normado**.

Cuando solamente se verifican las propiedades ii) y iii) se dice que $\| \ \|$ es una **seminorma** en X.

Dado un espacio normado, $(X, \| \ \|)$, la aplicación $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ dada por:

$$\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\| \qquad (x, y \in X)$$

es una distancia en X que se llama *distancia asociada a la norma*.

Todo espacio normado se considera siempre como espacio métrico con la distancia asociada a su norma.

Como en todo espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ *converge* a $x \in X$ si $\{\|x_n - x\|\} \to 0$.

Como en todo espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ *converge* a $x \in X$ si $\{\|x_n - x\|\} \to 0$.

Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Como en todo espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ *converge* a $x \in X$ si $\{\|x_n - x\|\} \to 0$.

Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Cuando toda sucesión de Cauchy es convergente se dice que la norma es **completa** y que X es un **espacio normado completo** o un **espacio de Banach**.

Como en todo espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ *converge* a $x \in X$ si $\{\|x_n - x\|\} \to 0$.

Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Cuando toda sucesión de Cauchy es convergente se dice que la norma es **completa** y que X es un **espacio normado completo** o un **espacio de Banach**.

En todo espacio normado X, dados $a \in X$ y $r > 0$, representamos por $B(a,r)$ la *bola abierta* de centro a y radio r:

$$B(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$$

Como en todo espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ *converge* a $x \in X$ si $\{\|x_n - x\|\} \to 0$.

Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Cuando toda sucesión de Cauchy es convergente se dice que la norma es **completa** y que X es un **espacio normado completo** o un **espacio de Banach**.

En todo espacio normado X, dados $a \in X$ y $r > 0$, representamos por $B(a,r)$ la *bola abierta* de centro a y radio r:

$$B(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$$

Un conjunto $A \subset X$ es *abierto* en el espacio normado $(X, \|\ \|)$ si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$.

Como en todo espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ *converge* a $x \in X$ si $\{\|x_n - x\|\} \to 0$.

Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Cuando toda sucesión de Cauchy es convergente se dice que la norma es **completa** y que X es un **espacio normado completo** o un **espacio de Banach**.

En todo espacio normado X, dados $a \in X$ y $r > 0$, representamos por $B(a,r)$ la *bola abierta* de centro a y radio r:

$$B(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$$

Un conjunto $A \subset X$ es *abierto* en el espacio normado $(X, \| \, \|)$ si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$.Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

Como en todo espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ *converge* a $x \in X$ si $\{\|x_n - x\|\} \to 0$.

Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Cuando toda sucesión de Cauchy es convergente se dice que la norma es **completa** y que X es un **espacio normado completo** o un **espacio de Banach**.

En todo espacio normado X, dados $a \in X$ y $r > 0$, representamos por $B(a,r)$ la *bola abierta* de centro a y radio r:

$$B(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$$

Un conjunto $A \subset X$ es *abierto* en el espacio normado $(X, \|\ \|)$ si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$.Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto.

Es inmediato comprobar que las bolas abiertas son conjuntos abiertos y que un conjunto es abierto si, y sólo si, es unión de bolas abiertas.

Dados $a \in X$ y $r \geqslant 0$, representamos por $\overline{B}(a,r)$ la *bola cerrada* de centro a y radio r:

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \|x-a\| \leqslant r\}$$

Dados $a \in X$ y $r \geqslant 0$, representamos por $\overline{B}(a,r)$ la *bola cerrada* de centro a y radio r:

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \|x-a\| \leqslant r\}$$

Un conjunto se dice que es *cerrado* cuando su complementario es abierto.

Dados $a \in X$ y $r \geqslant 0$, representamos por $\overline{B}(a,r)$ la *bola cerrada* de centro a y radio r:

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| \leqslant r\}$$

Un conjunto se dice que es *cerrado* cuando su complementario es abierto.Es fácil comprobar que las bolas cerradas son conjuntos cerrados.

Dados $a \in X$ y $r \geqslant 0$, representamos por $\overline{B}(a,r)$ la *bola cerrada* de centro a y radio r:

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| \leqslant r\}$$

Un conjunto se dice que es *cerrado* cuando su complementario es abierto.Es fácil comprobar que las bolas cerradas son conjuntos cerrados.

En todo espacio normado X representaremos por $B_X = \overline{B}(0,1)$ la **bola cerrada unidad**, $U_X = B(0,1)$ la **bola abierta unidad** y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la **esfera unidad** de X.

Dados $a \in X$ y $r \geqslant 0$, representamos por $\overline{B}(a,r)$ la *bola cerrada* de centro a y radio r:

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \|x-a\| \leqslant r\}$$

Un conjunto se dice que es *cerrado* cuando su complementario es abierto.Es fácil comprobar que las bolas cerradas son conjuntos cerrados.

En todo espacio normado X representaremos por $B_X = \overline{B}(0,1)$ la **bola cerrada unidad**, $U_X = B(0,1)$ la **bola abierta unidad** y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la **esfera unidad** de X.Con ello tenemos que

$$B(a,r) = a + rU_X, \qquad \overline{B}(a,r) = a + rB_X$$

Dados $a \in X$ y $r \geqslant 0$, representamos por $\overline{B}(a,r)$ la *bola cerrada* de centro a y radio r:

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| \leqslant r\}$$

Un conjunto se dice que es *cerrado* cuando su complementario es abierto.Es fácil comprobar que las bolas cerradas son conjuntos cerrados.

En todo espacio normado X representaremos por $B_X = \overline{B}(0,1)$ la **bola cerrada unidad**, $U_X = B(0,1)$ la **bola abierta unidad** y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la **esfera unidad** de X.Con ello tenemos que

$$B(a,r) = a + rU_X, \qquad \overline{B}(a,r) = a + rB_X$$

Todo espacio normado se considera siempre como espacio topológico con la topología definida por la distancia asociada a su norma. Dicha topología se llama topología de la norma.

Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no vacío, se dice que A **está acotado** si el conjunto $\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$ está mayorado, en cuyo caso se define el diámetro de A por

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$$

Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no vacío, se dice que A **está acotado** si el conjunto $\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$ está mayorado, en cuyo caso se define el diámetro de A por

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$$

Representaremos por $\overline{A}$ la adherencia del conjunto A. Es fácil probar que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no vacío, se dice que A **está acotado** si el conjunto $\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$ está mayorado, en cuyo caso se define el diámetro de A por

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$$

Representaremos por $\overline{A}$ la adherencia del conjunto A. Es fácil probar que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

En el caso particular de que X sea un espacio normado, es fácil comprobar que un conjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M$ para todo $x \in A$.

Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no vacío, se dice que A **está acotado** si el conjunto $\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$ está mayorado, en cuyo caso se define el diámetro de A por

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$$

Representaremos por $\overline{A}$ la adherencia del conjunto A. Es fácil probar que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

En el caso particular de que X sea un espacio normado, es fácil comprobar que un conjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M$ para todo $x \in A$.

Proposición. Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas en un espacio vectorial X, y sean $\mathcal{T}_{\|\ \|}$ y $\mathcal{T}_{|||\ |||}$ las respectivas topologías. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Si (X,d) es un espacio métrico y $A\subset X$ un conjunto no vacío, se dice que A **está acotado** si el conjunto $\{\mathrm{d}(x,y):x,y\in A\}$ está mayorado, en cuyo caso se define el diámetro de A por

$$\mathrm{diam}(A)=\sup\{\mathrm{d}(x,y):x,y\in A\}$$

Representaremos por $\overline{A}$ la adherencia del conjunto A. Es fácil probar que $\mathrm{diam}(A)=\mathrm{diam}(\overline{A})$.

En el caso particular de que X sea un espacio normado, es fácil comprobar que un conjunto $A\subset X$ está acotado si, y sólo si, existe $M>0$ tal que $\|x\|\leqslant M$ para todo $x\in A$.

Proposición. Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas en un espacio vectorial X, y sean $\mathcal{T}_{\|\ \|}$ y $\mathcal{T}_{|||\ |||}$ las respectivas topologías. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{T}_{\|\ \|}\subset\mathcal{T}_{|||\ |||}$.

Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no vacío, se dice que A **está acotado** si el conjunto $\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$ está mayorado, en cuyo caso se define el diámetro de A por

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$$

Representaremos por $\overline{A}$ la adherencia del conjunto A. Es fácil probar que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

En el caso particular de que X sea un espacio normado, es fácil comprobar que un conjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M$ para todo $x \in A$.

Proposición. Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas en un espacio vectorial X, y sean $\mathcal{T}_{\|\ \|}$ y $\mathcal{T}_{|||\ |||}$ las respectivas topologías. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{T}_{\|\ \|} \subset \mathcal{T}_{|||\ |||}$.
b) Existe $\beta > 0$ tal que $\|x\| \leqslant \beta |||x|||$ para todo $x \in X$.

Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no vacío, se dice que A **está acotado** si el conjunto $\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$ está mayorado, en cuyo caso se define el diámetro de A por

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$$

Representaremos por $\overline{A}$ la adherencia del conjunto A. Es fácil probar que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

En el caso particular de que X sea un espacio normado, es fácil comprobar que un conjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M$ para todo $x \in A$.

Proposición. Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas en un espacio vectorial X, y sean $\mathcal{T}_{\|\ \|}$ y $\mathcal{T}_{|||\ |||}$ las respectivas topologías. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{T}_{\|\ \|} \subset \mathcal{T}_{|||\ |||}$.
b) Existe $\beta > 0$ tal que $\|x\| \leqslant \beta |||x|||$ para todo $x \in X$.

Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no vacío, se dice que A **está acotado** si el conjunto $\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$ está mayorado, en cuyo caso se define el diámetro de A por

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in A\}$$

Representaremos por $\overline{A}$ la adherencia del conjunto A. Es fácil probar que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.

En el caso particular de que X sea un espacio normado, es fácil comprobar que un conjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M$ para todo $x \in A$.

Proposición. Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas en un espacio vectorial X, y sean $\mathcal{T}_{\|\ \|}$ y $\mathcal{T}_{|||\ |||}$ las respectivas topologías. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{T}_{\|\ \|} \subset \mathcal{T}_{|||\ |||}$.
b) Existe $\beta > 0$ tal que $\|x\| \leqslant \beta |||x|||$ para todo $x \in X$.

$a) \Longrightarrow b)$. La hipótesis implica que $B_{\| \ \|}(0,1) \in \mathcal{T}_{||| \ |||}$, por lo que existe $r > 0$ tal que $B_{||| \ |||}(0,r) \subset B_{\| \ \|}(0,1)$.

$a) \Longrightarrow b)$. La hipótesis implica que $B_{\|\ \|}(0,1) \in \mathfrak{T}_{|||\ |||}$, por lo que existe $r > 0$ tal que $B_{|||\ |||}(0,r) \subset B_{\|\ \|}(0,1)$.Por tanto para todo $x \neq 0$ se tiene que

$$\left|\left|\left| \frac{r}{2} \frac{x}{|||x|||} \right|\right|\right| = \frac{r}{2} < r \Longrightarrow \left\| \frac{r}{2} \frac{x}{|||x|||} \right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \|x\| \leqslant \frac{2}{r} |||x|||$$

y basta poner $\beta = 2/r$.

$a) \Longrightarrow b)$. La hipótesis implica que $B_{\|\ \|}(0,1) \in \mathfrak{T}_{|||\ |||}$, por lo que existe $r > 0$ tal que $B_{|||\ |||}(0,r) \subset B_{\|\ \|}(0,1)$.Por tanto para todo $x \neq 0$ se tiene que

$$\left|\left|\left|\frac{r}{2}\frac{x}{|||x|||}\right|\right|\right| = \frac{r}{2} < r \Longrightarrow \left\|\frac{r}{2}\frac{x}{|||x|||}\right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \|x\| \leqslant \frac{2}{r}|||x|||$$

y basta poner $\beta = 2/r$.

$b) \Longrightarrow a)$. Si $r > 0$ y $|||x||| < \frac{r}{\beta}$, la hipótesis implica que $\|x\| < r$.

$a) \Longrightarrow b)$. La hipótesis implica que $B_{\|\ \|}(0,1) \in \mathfrak{T}_{|||\ |||}$, por lo que existe $r > 0$ tal que $B_{|||\ |||}(0,r) \subset B_{\|\ \|}(0,1)$.Por tanto para todo $x \neq 0$ se tiene que

$$\left|\left|\left| \frac{r}{2} \frac{x}{|||x|||} \right|\right|\right| = \frac{r}{2} < r \Longrightarrow \left\| \frac{r}{2} \frac{x}{|||x|||} \right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \|x\| \leqslant \frac{2}{r} |||x|||$$

y basta poner $\beta = 2/r$.

$b) \Longrightarrow a)$. Si $r > 0$ y $|||x||| < \frac{r}{\beta}$, la hipótesis implica que $\|x\| < r$.Es decir, $B_{|||\ |||}\left(a, \frac{r}{\beta}\right) \subset B_{\|\ \|}(a,r)$.

$a) \Longrightarrow b)$. La hipótesis implica que $B_{\|\ \|}(0,1) \in \mathcal{T}_{|||\ |||}$, por lo que existe $r > 0$ tal que $B_{|||\ |||}(0,r) \subset B_{\|\ \|}(0,1)$.Por tanto para todo $x \neq 0$ se tiene que

$$\left|\left|\left| \frac{r}{2} \frac{x}{|||x|||} \right|\right|\right| = \frac{r}{2} < r \Longrightarrow \left\| \frac{r}{2} \frac{x}{|||x|||} \right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \|x\| \leqslant \frac{2}{r} |||x|||$$

y basta poner $\beta = 2/r$.

$b) \Longrightarrow a)$. Si $r > 0$ y $|||x||| < \frac{r}{\beta}$, la hipótesis implica que $\|x\| < r$.Es decir, $B_{|||\ |||}(a, \frac{r}{\beta}) \subset B_{\|\ \|}(a,r)$.Si $A \in \mathcal{T}_{\|\ \|}$ se tiene que

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{\|\ \|}(a, r_a) \supset \bigcup_{a \in A} B_{|||\ |||}(a, \tfrac{r_a}{\beta}) \supset A$$

$a) \Longrightarrow b)$. La hipótesis implica que $B_{\|\ \|}(0,1) \in \mathfrak{T}_{|||\ |||}$, por lo que existe $r > 0$ tal que $B_{|||\ |||}(0,r) \subset B_{\|\ \|}(0,1)$.Por tanto para todo $x \neq 0$ se tiene que

$$\left|\left|\left| \frac{r}{2} \frac{x}{|||x|||} \right|\right|\right| = \frac{r}{2} < r \Longrightarrow \left\| \frac{r}{2} \frac{x}{|||x|||} \right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \|x\| \leqslant \frac{2}{r} |||x|||$$

y basta poner $\beta = 2/r$.

$b) \Longrightarrow a)$. Si $r > 0$ y $|||x||| < \frac{r}{\beta}$, la hipótesis implica que $\|x\| < r$.Es decir, $B_{|||\ |||}(a, \frac{r}{\beta}) \subset B_{\|\ \|}(a,r)$.Si $A \in \mathfrak{T}_{\|\ \|}$ se tiene que

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{\|\ \|}(a, r_a) \supset \bigcup_{a \in A} B_{|||\ |||}(a, \tfrac{r_a}{\beta}) \supset A$$

Luego $A = \bigcup_{a \in A} B_{|||\ |||}(a, \frac{r_a}{\beta})$. Por tanto $A \in \mathfrak{T}_{|||\ |||}$.

Se dice que dos normas $\| \; \|$ y $||| \; |||$, en un espacio vectorial X, son **equivalentes** cuando definen la misma topología.

Se dice que dos normas $\| \ \|$ y $||| \ |||$, en un espacio vectorial X, son **equivalentes** cuando definen la misma topología.

Se deduce del anterior resultado que ello es equivalente a que existan números $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ verificándose que:

$$\|x\| \leqslant \alpha |||x||| \quad \text{y} \quad |||x||| \leqslant \beta \|x\| \qquad (x \in X)$$

Se dice que dos normas $\| \ \|$ y $||| \ |||$, en un espacio vectorial X, son **equivalentes** cuando definen la misma topología.

Se deduce del anterior resultado que ello es equivalente a que existan números $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ verificándose que:

$$\|x\| \leqslant \alpha |||x||| \quad \text{y} \quad |||x||| \leqslant \beta \|x\| \qquad (x \in X)$$

Estas dos desigualdades suelen expresarse mediante una sola desigualdad de la forma

$$m\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant M\|x\| \qquad (x \in X)$$

donde se entiende que $m > 0$ y $M > 0$.

Se dice que dos normas $\| \ \|$ y $||| \ |||$, en un espacio vectorial X, son **equivalentes** cuando definen la misma topología.

Se deduce del anterior resultado que ello es equivalente a que existan números $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ verificándose que:

$$\|x\| \leqslant \alpha |||x||| \quad \text{y} \quad |||x||| \leqslant \beta \|x\| \qquad (x \in X)$$

Estas dos desigualdades suelen expresarse mediante una sola desigualdad de la forma

$$m\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant M\|x\| \qquad (x \in X)$$

donde se entiende que $m > 0$ y $M > 0$.

Como consecuencia inmediata obtenemos que *dos normas equivalentes dan lugar a los mismos conjuntos acotados y a las mismas sucesiones de Cauchy* y, por supuesto, tienen las mismas sucesiones convergentes.

Se dice que dos normas $\| \ \|$ y $|\!|\!| \ |\!|\!|$, en un espacio vectorial X, son **equivalentes** cuando definen la misma topología.

Se deduce del anterior resultado que ello es equivalente a que existan números $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ verificándose que:

$$\|x\| \leqslant \alpha |\!|\!|x|\!|\!| \quad \text{y} \quad |\!|\!|x|\!|\!| \leqslant \beta \|x\| \qquad (x \in X)$$

Estas dos desigualdades suelen expresarse mediante una sola desigualdad de la forma

$$m\|x\| \leqslant |\!|\!|x|\!|\!| \leqslant M\|x\| \qquad (x \in X)$$

donde se entiende que $m > 0$ y $M > 0$.

Como consecuencia inmediata obtenemos que *dos normas equivalentes dan lugar a los mismos conjuntos acotados y a las mismas sucesiones de Cauchy* y, por supuesto, tienen las mismas sucesiones convergentes.Por tanto, **cualquier norma equivalente a una norma completa también es completa**.

Dados $(X, \| \, . \, \|_1)$ e $(Y, \| \, . \, \|_2)$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$, en el espacio vectorial producto $X \times Y$ se define una norma por

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$$

Dados $(X, \| \,.\, \|_1)$ e $(Y, \| \,.\, \|_2)$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$, en el espacio vectorial producto $X \times Y$ se define una norma por

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$$

Observa que $B_{X\times Y}((a,b),r) = B_X(a,r) \times B_Y(b,r)$, por lo que la topología de dicha norma es la topología producto en $X \times Y$.

Dados $(X, \| \, . \, \|_1)$ e $(Y, \| \, . \, \|_2)$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$, en el espacio vectorial producto $X \times Y$ se define una norma por

$$\|(x,y)\| = \text{máx}\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$$

Observa que $B_{X\times Y}((a,b),r) = B_X(a,r) \times B_Y(b,r)$, por lo que la topología de dicha norma es la topología producto en $X \times Y$.

En particular, definiendo:

$$\begin{aligned} \|(x,y)\| &= \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} \qquad (x,y) \in X \times X \\ \|(\lambda,x)\| &= \text{máx}\{|\lambda|, \|x\|\} \qquad (\lambda,x) \in \mathbb{K} \times X \end{aligned}$$

Dados $(X, \| \, . \, \|_1)$ e $(Y, \| \, . \, \|_2)$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$, en el espacio vectorial producto $X \times Y$ se define una norma por

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$$

Observa que $B_{X\times Y}((a,b),r) = B_X(a,r) \times B_Y(b,r)$, por lo que la topología de dicha norma es la topología producto en $X \times Y$.

En particular, definiendo:

$$\begin{array}{rcll} \|(x,y)\| & = & \max\{\|x\|, \|y\|\} & (x,y) \in X \times X \\ \|(\lambda,x)\| & = & \max\{|\lambda|, \|x\|\} & (\lambda,x) \in \mathbb{K} \times X \end{array}$$

Tenemos normas en $X \times X$ y en $\mathbb{K} \times X$ que definen las respectivas topologías producto.

Es claro que:

$$\{(x_n, y_n)\} \to (x, y) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x_n\} \to x \\ \{y_n\} \to y \end{array} \right.$$

$$\{(\lambda_n, x_n)\} \to (\lambda, x) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{\lambda_n\} \to \lambda \\ \{x_n\} \to x \end{array} \right.$$

Es claro que:

$$\{(x_n,y_n)\} \to (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} \{x_n\} \to x \\ \{y_n\} \to y \end{cases}$$

$$\{(\lambda_n,x_n)\} \to (\lambda,x) \Longleftrightarrow \begin{cases} \{\lambda_n\} \to \lambda \\ \{x_n\} \to x \end{cases}$$

De donde se sigue fácilmente que:

$$\{(x_n,y_n)\} \to (x,y) \Longrightarrow \{x_n+y_n\} \to x+y$$
$$\{(\lambda_n,x_n)\} \to (\lambda,x) \Longrightarrow \{\lambda_n x_n\} \to \lambda x$$

Es claro que:

$$\{(x_n,y_n)\} \to (x,y) \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \{x_n\} \to x \\ \{y_n\} \to y \end{cases}$$

$$\{(\lambda_n,x_n)\} \to (\lambda,x) \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \{\lambda_n\} \to \lambda \\ \{x_n\} \to x \end{cases}$$

De donde se sigue fácilmente que:

$$\{(x_n,y_n)\} \to (x,y) \Longrightarrow \{x_n+y_n\} \to x+y$$
$$\{(\lambda_n,x_n)\} \to (\lambda,x) \Longrightarrow \{\lambda_n x_n\} \to \lambda x$$

Es decir, en todo espacio normado, X, *la aplicación suma*, $(x,y) \to x+y$, de $X \times X$ en X, *y la aplicación producto por escalares*, $(\lambda,x) \to \lambda x$, de $\mathbb{K} \times X$ en X, *son continuas* considerando en cada caso la respectiva topología producto.

Es claro que:

$$\{(x_n, y_n)\} \to (x, y) \Longleftrightarrow \begin{cases} \{x_n\} \to x \\ \{y_n\} \to y \end{cases}$$

$$\{(\lambda_n, x_n)\} \to (\lambda, x) \Longleftrightarrow \begin{cases} \{\lambda_n\} \to \lambda \\ \{x_n\} \to x \end{cases}$$

De donde se sigue fácilmente que:

$$\{(x_n, y_n)\} \to (x, y) \Longrightarrow \{x_n + y_n\} \to x + y$$
$$\{(\lambda_n, x_n)\} \to (\lambda, x) \Longrightarrow \{\lambda_n x_n\} \to \lambda x$$

Es decir, en todo espacio normado, X, *la aplicación suma*, $(x, y) \to x + y$, de $X \times X$ en X, *y la aplicación producto por escalares*, $(\lambda, x) \to \lambda x$, de $\mathbb{K} \times X$ en X, *son continuas* considerando en cada caso la respectiva topología producto.

En consecuencia, *las traslaciones*, $x \mapsto a + x$, y *las homotecias*, $x \mapsto \lambda x$, ($\lambda \neq 0$) *son homeomorfismos de* X.

Consecuencia importante de la continuidad de la suma y del producto por escalares, es que si M es un subespacio vectorial de un espacio normado X su adherencia $\overline{M}$ también es un subespacio vectorial de X.

Consecuencia importante de la continuidad de la suma y del producto por escalares, es que si M es un subespacio vectorial de un espacio normado X su adherencia $\overline{M}$ también es un subespacio vectorial de X. Pues si $x, y \in \overline{M}$, hay sucesiones tales que $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$ con $x_n, y_n \in M$.

Consecuencia importante de la continuidad de la suma y del producto por escalares, es que si M es un subespacio vectorial de un espacio normado X su adherencia $\overline{M}$ también es un subespacio vectorial de X. Pues si $x, y \in \overline{M}$, hay sucesiones tales que $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$ con $x_n, y_n \in M$.Si $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que $\{\lambda x_n + y_n\} \to \lambda x + y$. Como $\lambda x_n + y_n \in M$ por ser M un subespacio, deducimos que $\lambda x + y \in \overline{M}$.

Consecuencia importante de la continuidad de la suma y del producto por escalares, es que si M es un subespacio vectorial de un espacio normado X su adherencia $\overline{M}$ también es un subespacio vectorial de X. Pues si $x, y \in \overline{M}$, hay sucesiones tales que $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$ con $x_n, y_n \in M$.Si $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que $\{\lambda x_n + y_n\} \to \lambda x + y$. Como $\lambda x_n + y_n \in M$ por ser M un subespacio, deducimos que $\lambda x + y \in \overline{M}$.

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, representaremos por $\overline{\mathtt{Lin}}(A)$ el más pequeño subespacio cerrado de X que contiene a A. Es claro que $\overline{\mathtt{Lin}}(A) = \overline{\mathtt{Lin}(A)}$.

Consecuencia importante de la continuidad de la suma y del producto por escalares, es que si M es un subespacio vectorial de un espacio normado X su adherencia $\overline{M}$ también es un subespacio vectorial de X. Pues si $x, y \in \overline{M}$, hay sucesiones tales que $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$ con $x_n, y_n \in M$.Si $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que $\{\lambda x_n + y_n\} \to \lambda x + y$. Como $\lambda x_n + y_n \in M$ por ser M un subespacio, deducimos que $\lambda x + y \in \overline{M}$.

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, representaremos por $\overline{\mathtt{Lin}}(A)$ el más pequeño subespacio cerrado de X que contiene a A. Es claro que $\overline{\mathtt{Lin}}(A) = \overline{\mathtt{Lin}(A)}$.

Todo subespacio vectorial M de un espacio normado X se considera como espacio normado con la restricción a M de la norma de X.

Consecuencia importante de la continuidad de la suma y del producto por escalares, es que si M es un subespacio vectorial de un espacio normado X su adherencia $\overline{M}$ también es un subespacio vectorial de X. Pues si $x, y \in \overline{M}$, hay sucesiones tales que $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$ con $x_n, y_n \in M$.Si $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que $\{\lambda x_n + y_n\} \to \lambda x + y$. Como $\lambda x_n + y_n \in M$ por ser M un subespacio, deducimos que $\lambda x + y \in \overline{M}$.

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, representaremos por $\overline{\mathtt{Lin}}(A)$ el más pequeño subespacio cerrado de X que contiene a A. Es claro que $\overline{\mathtt{Lin}}(A) = \overline{\mathtt{Lin}(A)}$.

Todo subespacio vectorial M de un espacio normado X se considera como espacio normado con la restricción a M de la norma de X.*Si M es completo entonces es cerrado en X.*

Consecuencia importante de la continuidad de la suma y del producto por escalares, es que si M es un subespacio vectorial de un espacio normado X su adherencia $\overline{M}$ también es un subespacio vectorial de X. Pues si $x, y \in \overline{M}$, hay sucesiones tales que $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$ con $x_n, y_n \in M$.Si $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que $\{\lambda x_n + y_n\} \to \lambda x + y$. Como $\lambda x_n + y_n \in M$ por ser M un subespacio, deducimos que $\lambda x + y \in \overline{M}$.

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, representaremos por $\overline{\mathrm{Lin}}(A)$ el más pequeño subespacio cerrado de X que contiene a A. Es claro que $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \overline{\mathrm{Lin}(A)}$.

Todo subespacio vectorial M de un espacio normado X se considera como espacio normado con la restricción a M de la norma de X.*Si M es completo entonces es cerrado en X*.

Si el espacio normado X es de Banach, todo subespacio vectorial cerrado de X también es de Banach.

Consecuencia importante de la continuidad de la suma y del producto por escalares, es que si M es un subespacio vectorial de un espacio normado X su adherencia $\overline{M}$ también es un subespacio vectorial de X. Pues si $x, y \in \overline{M}$, hay sucesiones tales que $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$ con $x_n, y_n \in M$.Si $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que $\{\lambda x_n + y_n\} \to \lambda x + y$. Como $\lambda x_n + y_n \in M$ por ser M un subespacio, deducimos que $\lambda x + y \in \overline{M}$.

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, representaremos por $\overline{\mathtt{Lin}}(A)$ el más pequeño subespacio cerrado de X que contiene a A. Es claro que $\overline{\mathtt{Lin}}(A) = \overline{\mathtt{Lin}(A)}$.

Todo subespacio vectorial M de un espacio normado X se considera como espacio normado con la restricción a M de la norma de X.*Si M es completo entonces es cerrado en X*.

Si el espacio normado X es de Banach, todo subespacio vectorial cerrado de X también es de Banach.

Un resultado, que demostraremos más adelante, es que *todo espacio normado X puede verse como subespacio denso de un espacio de Banach*, $\widehat{X}$, su **completación**.

El segmento que une dos puntos x, y de un espacio normado X es el conjunto

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

El segmento que une dos puntos x,y de un espacio normado X es el conjunto

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **convexo** si contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos.

El segmento que une dos puntos x, y de un espacio normado X es el conjunto

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **convexo** si contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos.La **envolvente convexa** de un conjunto no vacío $A \subset X$ se define como el más pequeño conjunto convexo que contiene a A y se representa por $\mathrm{co}(A)$.

El segmento que une dos puntos x, y de un espacio normado X es el conjunto

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **convexo** si contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos.La **envolvente convexa** de un conjunto no vacío $A \subset X$ se define como el más pequeño conjunto convexo que contiene a A y se representa por $\mathrm{co}(A)$.Se define la **envolvente convexo cerrada** de A como el más pequeño conjunto convexo y cerrado que contiene a A y se representa por $\overline{\mathrm{co}}(A)$.

El segmento que une dos puntos x, y de un espacio normado X es el conjunto

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **convexo** si contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos.La **envolvente convexa** de un conjunto no vacío $A \subset X$ se define como el más pequeño conjunto convexo que contiene a A y se representa por $\mathrm{co}(A)$.Se define la **envolvente convexo cerrada** de A como el más pequeño conjunto convexo y cerrado que contiene a A y se representa por $\overline{\mathrm{co}}(A)$.

En la siguiente proposición se recogen algunos resultados que serán de uso frecuente en todo este curso.

Proposición. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Para todo $x \in X$ se define

$$\operatorname{dist}(x, A) = \text{ínf}\,\{\|x - a\| : a \in A\}$$

Proposición. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Para todo $x \in X$ se define

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\}$$

Se verifica que:

1. $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.

Proposición. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Para todo $x \in X$ se define

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\}$$

Se verifica que:

1. $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.
2. $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,\overline{A})$, y $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x,A) = 0$.

Proposición. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Para todo $x \in X$ se define

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\}$$

Se verifica que:

1. $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.
2. $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,\overline{A})$, y $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x,A) = 0$.
3. $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda| \operatorname{dist}(x,A)$, y $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(y,B)$. En particular, si A es un subespacio vectorial de X la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x,A)$ es una seminorma en X.

Proposición. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Para todo $x \in X$ se define

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf \{\|x-a\| : a \in A\}$$

Se verifica que:

1. $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.
2. $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,\overline{A})$, y $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x,A) = 0$.
3. $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda| \operatorname{dist}(x,A)$, y $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(y,B)$. En particular, si A es un subespacio vectorial de X la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x,A)$ es una seminorma en X.
4. Si M es un subespacio vectorial de X y $z - x \in M$ entonces $\operatorname{dist}(x,M) = \operatorname{dist}(z,M)$

Proposición. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Para todo $x \in X$ se define

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\}$$

Se verifica que:

1. $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.
2. $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,\overline{A})$, y $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x,A) = 0$.
3. $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda| \operatorname{dist}(x,A)$, y $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(y,B)$. En particular, si A es un subespacio vectorial de X la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x,A)$ es una seminorma en X.
4. Si M es un subespacio vectorial de X y $z - x \in M$ entonces $\operatorname{dist}(x,M) = \operatorname{dist}(z,M)$
5. Si M es un subespacio vectorial cerrado de X, definiendo $\|x+M\| = \operatorname{dist}(x,M)$ se obtiene una norma en el espacio vectorial cociente X/M.

Demostración. 1) Para todo $a \in A$ tenemos que $\operatorname{dist}(x, A) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\|$, por lo que, $\operatorname{dist}(x, A) - \|x - y\| \leqslant \|y - a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $\operatorname{dist}(x, A) - \|x - y\| \leqslant \operatorname{dist}(y, A)$, o sea, $\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \leqslant \|x - y\|$. Intercambiando ahora x e y obtenemos $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leqslant \|x - y\|$.

Demostración. 1) Para todo $a \in A$ tenemos que $\operatorname{dist}(x,A) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\|$, por lo que, $\operatorname{dist}(x,A) - \|x-y\| \leqslant \|y-a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $\operatorname{dist}(x,A) - \|x-y\| \leqslant \operatorname{dist}(y,A)$, o sea, $\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A) \leqslant \|x-y\|$. Intercambiando ahora x e y obtenemos $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.

2) Si $a \in \overline{A}$ se tiene que $a = \text{lím}\{a_n\}$ con $a_n \in A$, por lo que $\|x-a\| = \text{lím}\|x-a_n\| \geqslant \operatorname{dist}(x,A)$. Como esto es cierto para todo $a \in \overline{A}$, deducimos que $\operatorname{dist}(x,\overline{A}) \geqslant \operatorname{dist}(x,A)$, pero la desigualdad contraria es evidente ya que $A \subset \overline{A}$, luego $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,\overline{A})$.

Demostración. 1) Para todo $a \in A$ tenemos que $\operatorname{dist}(x,A) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\|$, por lo que, $\operatorname{dist}(x,A) - \|x-y\| \leqslant \|y-a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $\operatorname{dist}(x,A) - \|x-y\| \leqslant \operatorname{dist}(y,A)$, o sea, $\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A) \leqslant \|x-y\|$. Intercambiando ahora x e y obtenemos $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.

2) Si $a \in \overline{A}$ se tiene que $a = \lim\{a_n\}$ con $a_n \in A$, por lo que $\|x-a\| = \lim \|x-a_n\| \geqslant \operatorname{dist}(x,A)$. Como esto es cierto para todo $a \in \overline{A}$, deducimos que $\operatorname{dist}(x,\overline{A}) \geqslant \operatorname{dist}(x,A)$, pero la desigualdad contraria es evidente ya que $A \subset \overline{A}$, luego $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,\overline{A})$.

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \operatorname{dist}(x,A) < \varepsilon \Longleftrightarrow \operatorname{dist}(x,A) = 0$$

3) Sea $\lambda \neq 0$. Para todo $a \in A$ se tiene $|\lambda| \operatorname{dist}(x, A) \leqslant |\lambda| \|x - a\| = \|\lambda x - \lambda a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $|\lambda| \operatorname{dist}(x, A) \leqslant \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A)$.

3) Sea $\lambda \neq 0$. Para todo $a \in A$ se tiene $|\lambda| \operatorname{dist}(x,A) \leqslant |\lambda| \|x - a\| = \|\lambda x - \lambda a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $|\lambda| \operatorname{dist}(x,A) \leqslant \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A)$.Esta misma desigualdad, cambiando λ por $1/\lambda$, x por λx y A por λA, nos dice que $\frac{1}{|\lambda|} \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant \operatorname{dist}(x,A)$, esto es,
$\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant |\lambda| \operatorname{dist}(x,A)$.

3) Sea $\lambda \neq 0$. Para todo $a \in A$ se tiene $|\lambda| \operatorname{dist}(x,A) \leqslant |\lambda| \|x-a\| = \|\lambda x - \lambda a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $|\lambda| \operatorname{dist}(x,A) \leqslant \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A)$.Esta misma desigualdad, cambiando λ por $1/\lambda$, x por λx y A por λA, nos dice que $\frac{1}{|\lambda|} \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant \operatorname{dist}(x,A)$, esto es, $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant |\lambda| \operatorname{dist}(x,A)$.Por tanto $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda| \operatorname{dist}(x,A)$.

3) Sea $\lambda \neq 0$. Para todo $a \in A$ se tiene $|\lambda|\operatorname{dist}(x,A) \leqslant |\lambda|\|x-a\| = \|\lambda x - \lambda a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $|\lambda|\operatorname{dist}(x,A) \leqslant \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A)$.Esta misma desigualdad, cambiando λ por $1/\lambda$, x por λx y A por λA, nos dice que $\frac{1}{|\lambda|}\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant \operatorname{dist}(x,A)$, esto es, $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant |\lambda|\operatorname{dist}(x,A)$.Por tanto $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda|\operatorname{dist}(x,A)$.

Por otra parte, $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \|x+y-(a+b)\| \leqslant \|x-a\| + \|y-b\|$, y basta tomar ínfimos en $a \in A$ y en $b \in B$ para obtener que $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(y,B)$.

3) Sea $\lambda \neq 0$. Para todo $a \in A$ se tiene $|\lambda| \operatorname{dist}(x, A) \leqslant |\lambda| \|x - a\| = \|\lambda x - \lambda a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $|\lambda| \operatorname{dist}(x, A) \leqslant \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A)$.Esta misma desigualdad, cambiando λ por $1/\lambda$, x por λx y A por λA, nos dice que $\frac{1}{|\lambda|} \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant \operatorname{dist}(x, A)$, esto es, $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant |\lambda| \operatorname{dist}(x, A)$.Por tanto $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda| \operatorname{dist}(x, A)$.

Por otra parte, $\operatorname{dist}(x + y, A + B) \leqslant \|x + y - (a + b)\| \leqslant \|x - a\| + \|y - b\|$, y basta tomar ínfimos en $a \in A$ y en $b \in B$ para obtener que $\operatorname{dist}(x + y, A + B) \leqslant \operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(y, B)$.

4) Si M es un subespacio vectorial, y $z - x \in M$ la aplicación $m \mapsto m + (x - z)$ es una biyección de M sobre M por lo que $\{\|x - m\| : m \in M\} = \{\|x - (m + (x - z))\| : m \in M\} = \{\|z - m\| : m \in M\}$.

3) Sea $\lambda \neq 0$. Para todo $a \in A$ se tiene $|\lambda|\operatorname{dist}(x,A) \leqslant |\lambda|\|x-a\| = \|\lambda x - \lambda a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $|\lambda|\operatorname{dist}(x,A) \leqslant \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A)$.Esta misma desigualdad, cambiando λ por $1/\lambda$, x por λx y A por λA, nos dice que $\frac{1}{|\lambda|}\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant \operatorname{dist}(x,A)$, esto es, $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant |\lambda|\operatorname{dist}(x,A)$.Por tanto $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda|\operatorname{dist}(x,A)$.

Por otra parte, $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \|x+y-(a+b)\| \leqslant \|x-a\| + \|y-b\|$, y basta tomar ínfimos en $a \in A$ y en $b \in B$ para obtener que $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(y,B)$.

4) Si M es un subespacio vectorial, y $z - x \in M$ la aplicación $m \mapsto m + (x-z)$ es una biyección de M sobre M por lo que $\{\|x-m\| : m \in M\} = \{\|x-(m+(x-z))\| : m \in M\} = \{\|z-m\| : m \in M\}$.

5) Es consecuencia directa de lo ya visto.

El siguiente es un importante criterio de complitud para espacios métricos que, como es natural, se aplica también para espacios normados.

El siguiente es un importante criterio de complitud para espacios métricos que, como es natural, se aplica también para espacios normados.

Criterio de complitud de Cantor. Un espacio métrico (X, d) es completo si, y sólo si, para toda sucesión $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\{\operatorname{diam}(F_n)\} = 0$, se verifica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

El siguiente es un importante criterio de complitud para espacios métricos que, como es natural, se aplica también para espacios normados.

Criterio de complitud de Cantor. Un espacio métrico (X, d) es completo si, y sólo si, para toda sucesión $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\{\mathrm{diam}(F_n)\} = 0$, se verifica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que X sea completo y sea $\{F_n\}$ como en el enunciado del teorema. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Para todos $p \geqslant n$, $q \geqslant n$, se tiene que $\mathrm{d}(x_p, x_q) \leqslant \operatorname{diam}(F_n)$, lo que implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y, por ser X completo, se tiene que $\{x_n\} \to x \in X$.

Demostración. Supongamos que X sea completo y sea $\{F_n\}$ como en el enunciado del teorema. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Para todos $p \geqslant n$, $q \geqslant n$, se tiene que $\mathrm{d}(x_p, x_q) \leqslant \mathtt{diam}(F_n)$, lo que implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y, por ser X completo, se tiene que $\{x_n\} \to x \in X$.Como para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión parcial $\{x_{n+k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x y todos sus términos están en F_k que es cerrado, deducimos que $x \in F_k$, luego $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y, por tanto, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que X sea completo y sea $\{F_n\}$ como en el enunciado del teorema. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Para todos $p \geqslant n$, $q \geqslant n$, se tiene que $\mathrm{d}(x_p, x_q) \leqslant \mathrm{diam}(F_n)$, lo que implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y, por ser X completo, se tiene que $\{x_n\} \to x \in X$.Como para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión parcial $\{x_{n+k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x y todos sus términos están en F_k que es cerrado, deducimos que $x \in F_k$, luego $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y, por tanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición del enunciado y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy.

Demostración. Supongamos que X sea completo y sea $\{F_n\}$ como en el enunciado del teorema. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Para todos $p \geqslant n$, $q \geqslant n$, se tiene que $\mathrm{d}(x_p, x_q) \leqslant \mathtt{diam}(F_n)$, lo que implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y, por ser X completo, se tiene que $\{x_n\} \to x \in X$.Como para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión parcial $\{x_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y todos sus términos están en F_k que es cerrado, deducimos que $x \in F_k$, luego $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y, por tanto, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición del enunciado y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy.Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n = \overline{\{x_k : k \geqslant n\}}$.

Demostración. Supongamos que X sea completo y sea $\{F_n\}$ como en el enunciado del teorema. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Para todos $p \geqslant n$, $q \geqslant n$, se tiene que $\mathrm{d}(x_p, x_q) \leqslant \mathtt{diam}(F_n)$, lo que implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y, por ser X completo, se tiene que $\{x_n\} \to x \in X$.Como para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión parcial $\{x_{n+k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x y todos sus términos están en F_k que es cerrado, deducimos que $x \in F_k$, luego $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y, por tanto, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición del enunciado y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy.Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n = \overline{\{x_k : k \geqslant n\}}$.La sucesión $\{F_n\}$ así definida cumple las condiciones del enunciado ya que es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos y $\mathtt{diam}(F_n) \to 0$ por ser la sucesión de Cauchy.

Demostración. Supongamos que X sea completo y sea $\{F_n\}$ como en el enunciado del teorema. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Para todos $p \geqslant n$, $q \geqslant n$, se tiene que $\mathrm{d}(x_p, x_q) \leqslant \mathtt{diam}(F_n)$, lo que implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y, por ser X completo, se tiene que $\{x_n\} \to x \in X$.Como para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión parcial $\{x_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y todos sus términos están en F_k que es cerrado, deducimos que $x \in F_k$, luego $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y, por tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición del enunciado y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy.Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n = \overline{\{x_k : k \geqslant n\}}$.La sucesión $\{F_n\}$ así definida cumple las condiciones del enunciado ya que es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos y $\mathtt{diam}(F_n) \to 0$ por ser la sucesión de Cauchy.Luego existe un $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Puesto que $\mathrm{d}(x_n, x) \leqslant \mathtt{diam}(F_n)$ concluimos que $\{x_n\} \to x$.

Series en un espacio normado

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Dada una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de X podemos formar otra sucesión $\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$.

Series en un espacio normado

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Dada una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de X podemos formar otra sucesión $\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$.Dicha sucesión se representa por $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y se llama *serie de término general* a_n.

Series en un espacio normado

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Dada una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de X podemos formar otra sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$.Dicha sucesión se representa por $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y se llama *serie de término general* a_n.Concretamente, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, es la aplicación de $\mathbb{N}$ en X dada por $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Series en un espacio normado

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Dada una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de X podemos formar otra sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$.Dicha sucesión se representa por $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y se llama *serie de término general* a_n.Concretamente, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, es la aplicación de $\mathbb{N}$ en X dada por $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Las series son sucesiones por lo que es innecesario especificar lo que significa que una serie es convergente.

Series en un espacio normado

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Dada una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de X podemos formar otra sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$.Dicha sucesión se representa por $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y se llama *serie de término general* a_n.Concretamente, $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, es la aplicación de $\mathbb{N}$ en X dada por $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Las series son sucesiones por lo que es innecesario especificar lo que significa que una serie es convergente.El límite de una serie convergente $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y se llama *suma* de la serie.

Cuando la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_{\sigma(n)}$ converge para cualquier permutación σ del conjunto de los números naturales, decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **incondicionalmente** o **conmutativamente convergente.**

Cuando la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_{\sigma(n)}$ converge para cualquier permutación σ del conjunto de los números naturales, decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **incondicionalmente** o **conmutativamente convergente**.Se puede demostrar que, en tal caso, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ es la misma cualquiera sea la permutación σ.

Cuando la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{\sigma(n)}$ converge para cualquier permutación σ del conjunto de los números naturales, decimos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **incondicionalmente** o **conmutativamente convergente**.Se puede demostrar que, en tal caso, la suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ es la misma cualquiera sea la permutación σ.

Decimos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** cuando la serie numérica $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|a_n\|$ es convergente.

Cuando la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_{\sigma(n)}$ converge para cualquier permutación σ del conjunto de los números naturales, decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **incondicionalmente** o **conmutativamente convergente**.Se puede demostrar que, en tal caso, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ es la misma cualquiera sea la permutación σ.

Decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** cuando la serie numérica $\sum_{n\geqslant 1} \|a_n\|$ es convergente.

El siguiente resultado tiene interés por sí mismo.

Proposición. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de Cauchy en un espacio normado* X. *Entonces existe una sucesión parcial* $\left\{x_{\sigma(k)}\right\} = \{y_k\}$ *que verifica que* $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Proposición. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de Cauchy en un espacio normado* X. *Entonces existe una sucesión parcial* $\{x_{\sigma(k)}\} = \{y_k\}$ *que verifica que* $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$A_k = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^k} \ \text{para todos} \ p \geqslant n, q \geqslant n \right\}$$

Proposición. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión de Cauchy en un espacio normado* X. *Entonces existe una sucesión parcial* $\{x_{\sigma(k)}\} = \{y_k\}$ *que verifica que* $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$A_k = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^k} \text{ para todos } p \geqslant n, q \geqslant n \right\}$$

Se verifica que $A_k \neq \varnothing$, $A_{k+1} \subset A_k$, y si $n \in A_k$ entonces para todo $m > n$ también es $m \in A_k$.

Proposición. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en un espacio normado X. Entonces existe una sucesión parcial $\{x_{\sigma(k)}\} = \{y_k\}$ que verifica que $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$A_k = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^k} \text{ para todos } p \geqslant n, q \geqslant n \right\}$$

Se verifica que $A_k \neq \emptyset$, $A_{k+1} \subset A_k$, y si $n \in A_k$ entonces para todo $m > n$ también es $m \in A_k$.Por tanto los conjuntos A_k son infinitos. Definimos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por

$$\sigma(1) = \text{mín}(A_1), \quad \sigma(k+1) = \text{mín}\{n \in A_{k+1} : n > \sigma(k)\}$$

Proposición. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en un espacio normado X. Entonces existe una sucesión parcial $\left\{x_{\sigma(k)}\right\} = \{y_k\}$ que verifica que $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea

$$A_k = \left\{ n \in \mathbb{N} : \|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^k} \ \text{ para todos } \ p \geqslant n, q \geqslant n \right\}$$

Se verifica que $A_k \neq \emptyset$, $A_{k+1} \subset A_k$, y si $n \in A_k$ entonces para todo $m > n$ también es $m \in A_k$.Por tanto los conjuntos A_k son infinitos. Definimos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por

$$\sigma(1) = \min(A_1), \quad \sigma(k+1) = \min\{n \in A_{k+1} : n > \sigma(k)\}$$

Con ello σ es estrictamente creciente y poniendo $y_k = x_{\sigma(k)}$ se tiene que $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.

Con cierta frecuencia se usa el siguiente criterio de complitud.

Proposición. *Un espacio normado, X, es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Con cierta frecuencia se usa el siguiente criterio de complitud.

Proposición. *Un espacio normado, X, es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Si X es un espacio de Banach y $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una serie absolutamente convergente, entonces de la desigualdad

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \|x_k\|$$

se deduce que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.

Con cierta frecuencia se usa el siguiente criterio de complitud.

Proposición. *Un espacio normado, X, es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Si X es un espacio de Banach y $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una serie absolutamente convergente, entonces de la desigualdad

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \|x_k\|$$

se deduce que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.

Recíprocamente, si toda serie absolutamente convergente es convergente, entonces si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, sabemos, por la proposición anterior, que hay una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ tal que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)}\|$ es convergente, por lo que también será convergente la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)}\right) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(x_{\sigma(k+1)} - x_{\sigma(n)}\right) \right\} = \left\{ x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(1)} \right\}$$

es decir, la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente, pero entonces $\{x_n\}$ también es convergente.

Puesto que una serie convergente de términos positivos es siempre incondicionalmente convergente, deducimos que, en cualquier espacio de Banach, toda serie absolutamente convergente es, de hecho, incondicionalmente convergente.

Puesto que una serie convergente de términos positivos es siempre incondicionalmente convergente, deducimos que, en cualquier espacio de Banach, toda serie absolutamente convergente es, de hecho, incondicionalmente convergente.

Así pues, siempre en un espacio de Banach, la relación entre los distintos tipos de convergencia es la siguiente:

convergencia absoluta $\Longrightarrow$ *convergencia incondicional* $\Longrightarrow$ *convergencia*

Puesto que una serie convergente de términos positivos es siempre incondicionalmente convergente, deducimos que, en cualquier espacio de Banach, toda serie absolutamente convergente es, de hecho, incondicionalmente convergente.

Así pues, siempre en un espacio de Banach, la relación entre los distintos tipos de convergencia es la siguiente:

convergencia absoluta $\Longrightarrow$ *convergencia incondicional* $\Longrightarrow$ *convergencia*

Sabemos que en $\mathbb{K}$ la convergencia incondicional equivale a la absoluta. Enseguida veremos ejemplos de series incondicionalmente convergentes en espacios de Banach, que no son absolutamente convergentes.